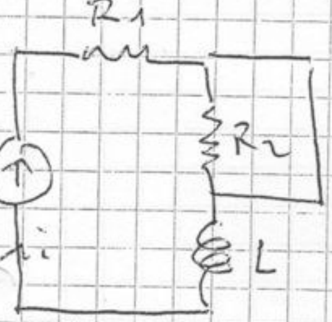
①

Correction des exercices Électrocinétique II

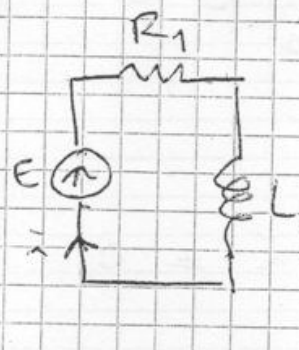
Exercice 1

$R_1 = 50\,\Omega$, $R_2 = 100\,\Omega$, $L = 0{,}1\ H$, $E = 100\ V$

* $0 \leq t \leq t_0$ $\quad t_0 = 4\,ms$



$\Leftrightarrow$



$$R_1 i + L\frac{di}{dt} = E \Rightarrow i = \frac{E}{R_1}\left(1 - e^{-\frac{R_1}{L}t}\right)$$

car $i(t=0) = 0$

$$\boxed{i = 2\left(1 - e^{-500t}\right)\ A \quad 0 \leq t \leq 4\,ms}$$

* $t \geq t_0$

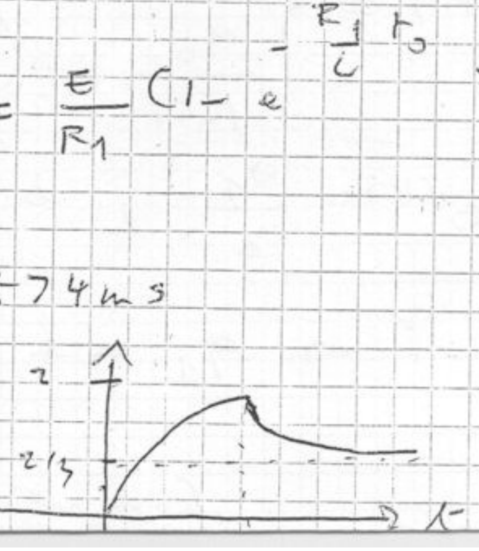
$$(R_1 + R_2)\, i + L\frac{di}{dt} = E$$

$$\Rightarrow i = \frac{E}{R_1 + R_2} + C e^{-\frac{R_1+R_2}{L}t}$$

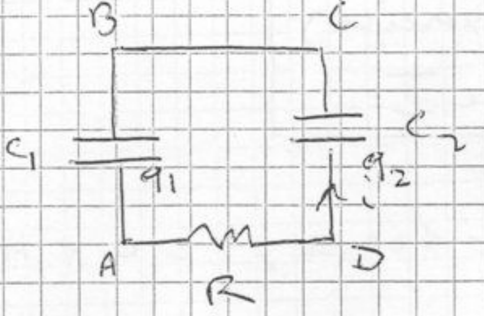
En raison de la présence de L, i est continue (ou encore en raison de la continuité de l'énergie emmagasinée dans L), donc

$$i(t_0) = \frac{E}{R_1 + R_2} + C e^{-\frac{R_1+R_2}{L}t_0} = \frac{E}{R_1}\left(1 - e^{-\frac{R_1}{L}t_0}\right)$$

$$i = \frac{2}{3} + 429\, e^{-1500t} \qquad t \geq 4\,ms$$



Exercice 2



$$\begin{cases} Ri + \dfrac{q_2}{C_2} - \dfrac{q_1}{C_1} = 0 & \text{(Kirchhoff)} \\ i = -\dfrac{dq_1}{dt} = \dfrac{dq_2}{dt} \end{cases}$$

$$R\frac{di}{dt} + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) i = 0$$

$$i = C \cdot \exp\left(-\frac{C_1 + C_2}{RC_1C_2} t\right)$$

$t = 0 \quad q_1(t=0) = q_0 \quad , \quad q_2(t=0) = 0$

$$\Rightarrow \quad i(t=0) = +\frac{q_0}{RC_1}$$

(On voit que i est discontinu en $t = 0$, c'est la charge des condensateurs, qui donne aussi leur énergie, qui est continue.

Physiquement i n'est pas vraiment discontinu car le circuit a une certaine self L)

$$i(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \dfrac{q_0}{RC_1} \exp\left(-\dfrac{C_1 + C_2}{C_1C_2R} t\right) & t \geq 0 \end{cases}$$

$$u_{AB}(t) = \frac{q_1}{C_1} \quad , \quad u_{CD}(t) = -\frac{q_2}{C_2}$$

$$\frac{dq_1}{dt} = -i \Rightarrow q_1 = +\frac{q_0}{RC_1} \times \frac{RC_1C_2}{C_1 + C_2}\left(e^{-\frac{C_1 + C_2}{C_1C_2R} t} - 1\right) + q_0$$

(on utilise $q_1(t=0) = q_0$)

$$\begin{cases} q_1(t) = q_0 - q_0 \dfrac{C_2}{C_1+C_2}\left(1 - e^{-\frac{C_1+C_2}{RC_1C_2}t}\right) \\ q_2(t) = q_0 - q_1(t) \end{cases}$$

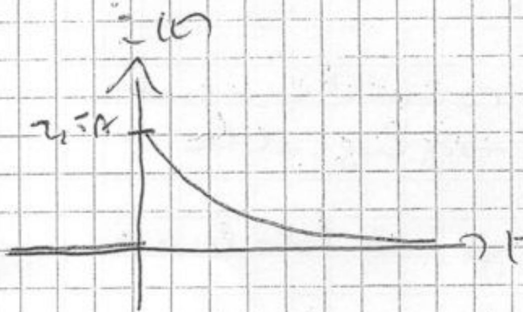
$$\begin{cases} u_{AB} = \dfrac{q_0}{C_1} - q_0 \dfrac{C_2/C_1}{C_1+C_2}\left(1 - e^{-\frac{C_1+C_2}{RC_1C_2}t}\right) \\ u_{CD} = -\dfrac{q_0}{C_1+C_2}\left(1 - e^{-\frac{C_1+C_2}{C_1C_2R}t}\right) \end{cases} \quad t>0$$

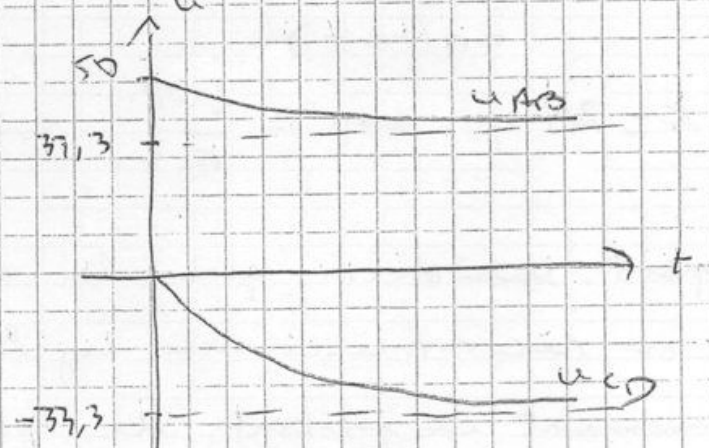
A.N $t>0$

$$i(t) = \frac{5}{2} e^{-25000t} \ A$$

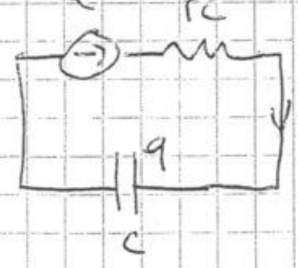
$$u_{AB} = 50 - \frac{50}{3}\left(1 - e^{-25000t}\right) \ V$$

$$u_{CD} = -\frac{100}{3}\left(1 - e^{-25000t}\right) \ V$$





Exercice 3



$$Ri - e + \frac{q}{C} = 0 \ , \quad i = \frac{dq}{dt}$$

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = \frac{e(t)}{R}$$

+ période de charge : $e = E$ $\quad \frac{T}{2} \leq t \leq T$

$$q(t) = CE\left(1 - e^{-\frac{t - T/2}{RC}}\right)$$

à $t = T$, $e^{-\frac{T/2}{RC}} = e^{-T/2RC} = e^{-10} = 4{,}5 \cdot 10^{-5}$

complètement négligeable,

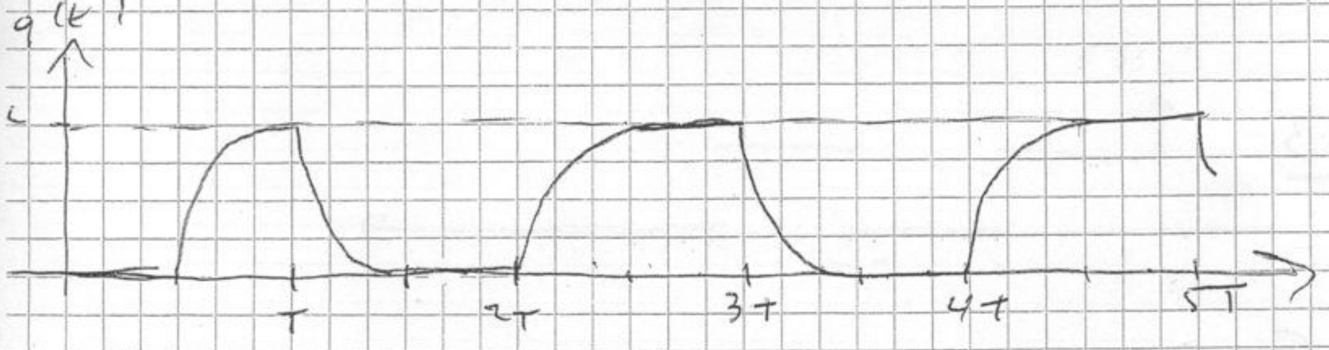
on peut donc considérer que la charge est complète en $t = T$, $q(T) \simeq q_{max} = EC$

+ période de décharge : $e = 0$, $T \leq t \leq 2T$

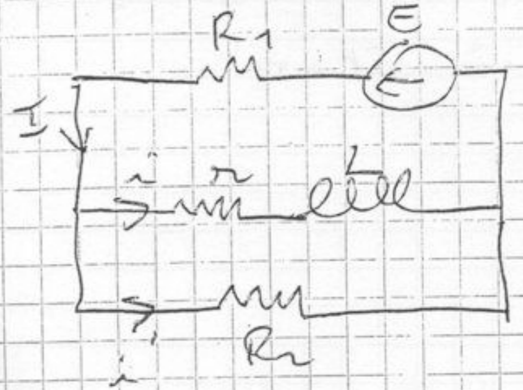
$$q(t) = \underbrace{EC}_{\simeq q(t=T)} \exp -\left(\frac{t-T}{RC}\right)$$

En $t = 2T$, $\exp - \frac{t-T}{RC} = e^{-20}$ complètement négligeable,

on peut considérer que la décharge est totale et donc on recommence un cycle de charge comme précédemment en partant de $q = 0$.



Exercice 4



$i' = I - i$, il suffit donc de calculer I et i

$$\begin{cases} R_1 I - E + r i + L \dfrac{di}{dt} = 0 & (1) \\ -L \dfrac{di}{dt} - r i + R_2 (I - i) = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow I = \frac{E}{R_1} - \frac{r i}{R_1} - \frac{L}{R_1} \frac{di}{dt}$$

$$(2) \Rightarrow -L \frac{di}{dt} - (r + R_2) i + \frac{R_2}{R_1} E - \frac{r R_2}{R_1} i - \frac{R_2 L}{R_1} \frac{di}{dt} = 0$$

$$\frac{di}{dt} + \frac{1}{L} \left(r + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right) i = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{E}{L}$$

Posons $\rho = r + \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$

$$i(t) = \frac{E R_2}{\rho (R_1 + R_2)} \left(1 - e^{-\frac{\rho}{L} t} \right)$$

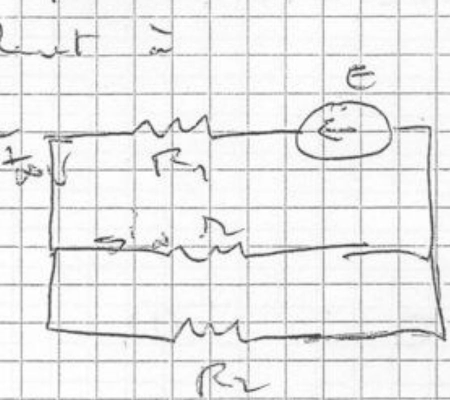
$$I(t) = \frac{E}{R_1} \left(1 - \frac{r R_2}{\rho (R_1 + R_2)} \right) + \frac{E R_2}{\rho (R_1 + R_2) R_1} [r - \rho] e^{-\frac{\rho}{L} t}$$

$$= \frac{E}{R_1 + R_2} + \frac{R_2}{R_1 + R_2} i(t)$$

Quand $t \to \infty$: $i_\infty = \dfrac{E R_2}{\rho (R_1 + R_2)} = \dfrac{E R_2}{R_1 R_2 + r (R_1 + R_2)}$

$$I_\infty = \frac{E}{R_1 + R_2} + \frac{R_2}{R_1 + R_2} i_\infty = \frac{E (r + R_2)}{R_1 R_2 + r (R_1 + R_2)}$$

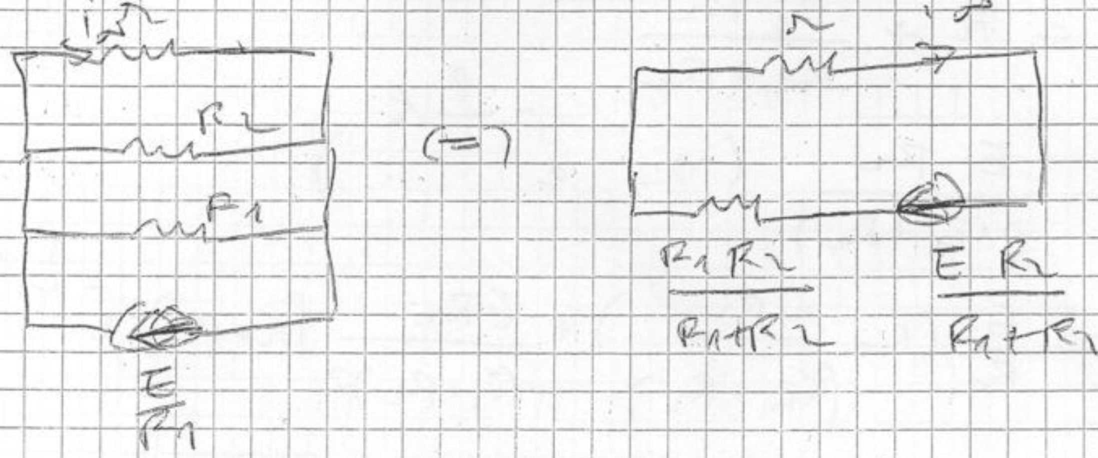
Quand $t \to \infty$, on atteint le régime permanent, il n'y a donc plus de variation de flux dans L, et donc plus de fém induite. Le circuit est équivalent à



Pour calculer I_∞, on utilise par ex. le circuit équivalent

$$I_\infty = \frac{E}{R_1 + \frac{rR_2}{r+R_2}} = \frac{E(r+R_2)}{R_1(r+R_2)+rR_2}$$

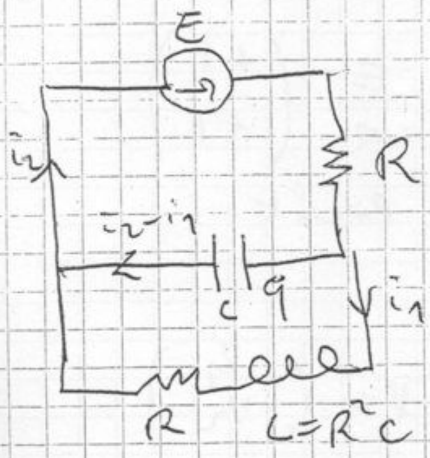
Pour calculer i_∞, on réduit le circuit comme suit



$$\Rightarrow i_\infty = \frac{ER_2}{R_1+R_2} \times \frac{1}{r + \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}}$$

$$= \frac{ER_2}{R_1R_2 + r(R_1+R_2)}$$

Exercice 5 $\quad L = R^2C$



$$\begin{cases} \dfrac{q}{C} = -R i_2 + E & (1) \\[2mm] \dfrac{q}{C} = R i_1 + R^2C \dfrac{di_1}{dt} & (2) \\[2mm] \dfrac{dq}{dt} = i_2 - i_1 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} q(t=0) = 0 \quad \text{donc} \\[1mm] i_2(t=0) = \dfrac{E}{R} \\[1mm] i_1(t=0) = 0 \quad \text{en raison de la présence de } L \end{cases}$$

Le système d'équa-diff avec ces c.l. a une solution unique.

Si on connait i_2, (1) donne q. On peut donc éliminer q et travailler avec i_1 et i_2 :

$$\begin{aligned} (1)-(2) &\Rightarrow \begin{cases} 0 = -R(i_1 + i_2) + E - R^2C \dfrac{di_1}{dt} \\[2mm] -RC \dfrac{di_2}{dt} = i_2 - i_1 \end{cases} \\ (1) \text{ et } (3) & \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \dfrac{di_1}{dt} = -\dfrac{1}{RC}(i_1 + i_2) + \dfrac{E}{R^2C} & (1') \\[2mm] \dfrac{di_2}{dt} = \dfrac{1}{RC}(i_1 - i_2) & (2') \end{cases}$$

Pour résoudre ce système, le plus simple est d'utiliser la méthode matricielle : $I = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} E/R^2C \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{1}{RC} M I + A \Rightarrow I(t) = e^{\frac{M}{RC}t} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{vecteur} \\ \text{quelconque}}}{V} - RC M^{-1} \cdot A$$

V est déterminé par les c.l.

$$M^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$-RCM^{-1}A = -\frac{RC}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E/R^2C \\ 0 \end{pmatrix} = +\frac{E}{2R}\begin{pmatrix} +1 \\ +1 \end{pmatrix}$$

cette solution particulière correspond à la limite $t \to \infty$ du régime permanent

$$I(t) = \underbrace{\frac{E}{2R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\lim_{t\to\infty} I(t)} + e^{\frac{M}{RC}t} \cdot V \quad ; \quad V = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

Quand $t = 0$, $I = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{E}{R} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{E}{R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E/2R \\ E/2R \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$

Donc $V = \frac{E}{2R}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\frac{R}{E} I(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{\frac{M}{RC}t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ceci donne la solution g^{ale}.

Pour exponentier la matrice, on la diagonalise :

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = P D P^{-1}$$

$$D = \begin{pmatrix} -1+i & 0 \\ 0 & -1-i \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$$

$-1 \pm i$ = valeurs propres de M — vecteurs propres de M

$$e^{\frac{M}{RC}t} = P e^{\frac{D}{RC}t} P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-\frac{t}{RC}+\frac{it}{RC}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{t}{RC}-\frac{it}{RC}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & +i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$$

$$e^{\frac{M}{RC}t} = \frac{e^{-\frac{t}{RC}}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{it/RC} & i e^{it/RC} \\ e^{-it/RC} & -i e^{-it/RC} \end{pmatrix}$$

$$= e^{-\frac{t}{RC}} \begin{pmatrix} \cos\frac{t}{RC} & -\sin\frac{t}{RC} \\ \sin\frac{t}{RC} & \cos\frac{t}{RC} \end{pmatrix}$$

d'où finalement

$$i_1(t) = \frac{E}{2R}\left[1 - e^{-\frac{t}{RC}}\cos\frac{t}{RC} - e^{-\frac{t}{RC}}\sin\frac{t}{RC}\right]$$

$$i_2(t) = \frac{E}{2R}\left[1 - e^{-\frac{t}{RC}}\sin\frac{t}{RC} + e^{-\frac{t}{RC}}\cos\frac{t}{RC}\right]$$

$$q(t) = \frac{EC}{2}\left[1 + e^{-t/RC}\sin\frac{t}{RC} - e^{-t/RC}\cos\frac{t}{RC}\right]$$

Rem : on peut aussi résoudre le pb en cherchant une équ. diff du 2^e ordre satisfaite par i_1 (ou i_2) :

$$\frac{d^2 i_1}{dt^2} + \frac{2}{RC}\frac{di_1}{dt} + \frac{2 i_1}{(RC)^2} = \frac{E}{R(RC)^2}$$

avec les c.l. $i_1(t=0) = 0$

$$\frac{di_1}{dt}(t=0) = 0 \quad (\text{conséquence de } (2))$$